Программа по математике для вступительных экзаменов в докторантуру Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

I.

1.Непрерывность функций одной и нескольких переменных. Глобальные свойства непрерывных функций (теорема о промежуточном значении, теорема об экстремальных значениях, теорема о равномерной непрерывности)

2.Основные теоремы дифференциального исчисления функций одной переменной (Лемма Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа о конечном приращении) и их следствия.

3.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано и в форме Коши. Ряд Тейлора для основных элементарных функций.

4.Исследование функций методами дифференциального исчисления (условия монотонности, условия внутреннего экстремума, условия выпуклости).

5.Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского, Иенсена.

6.Первообразная (неопределенный интеграл). Теорема представления правильной дроби в виде суммы простейших дробей. Вычисление первообразной любой рациональной функции. Первообразная нерациональных функций.

7.Дифференцирование функций многих переменных. Теоремы о композиции дифференцируемых отображений. Дифференцирование обратного отображения. Производная по вектору и градиент функций.

8.Формула Тейлора для функций многих переменных. Экстремумы функций многих переменных. Условные экстремумы.

9.Теорема о неявной функции и её следствия (теорема об обратной функции, Якобиан и преобразование координат).

10.Определение интеграла Римана и его свойства. Важнейшие классы интегрируемых функций.

11.Интеграл и первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

12.Геометрические приложения интеграла (длина пути, площадь криволинейной трапеции, объем и поверхность тела вращения).

13.Несобственный интеграл. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Интеграл в смысле главного значения.

14. Многократный интеграл Римана. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

15.Сведения кратного интеграла к повторному (теорема Фубини и ее следствия)

16.Замена переменных в кратном интеграле.

17.Равномерная сходимость последовательностей функций и рядов функций. Критерий равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости ряда. Предельный переход, непрерывность, дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

18.Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла по параметру. Гамма-функция.

19.Тригонометрический ряд Фурье. Исследование поточечной сходимости. Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье.

20.Поверхность (гладкое или дифференцируемое многообразие) в R^n и её ориентация. Край поверхности и поверхность с краем. Площадь k-мерной поверхности в R^n ($k \leq n$).

21.Дифференциальная форма. Внешний дифференциал формы. Интеграл от дифференциальной формы. Интегралы первого и второго ряда (криволинейные и поверхностные интегралы).

22.Основные интегральные формулы анализа (формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса).

23.Векторные поля и формы в R^3. Дифференциальные операторы grad, rot, div. Основные интегральные формулы анализа в векторных обозначениях.

II.

1.Определители и их основные свойства.

2.Ранг матрицы. Критерий невырожденности матрицы. Произведение матриц. Формула для обратной матрицы.

3.Система линейных уравнений. Формула Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений.

4.Евклидово пространство. Ортогональный базис и процесс ортогонализации. Изоморфизм эвклидовых пространств.

5.Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратной формы. Закон инерции квадратичной формы.

6.Линейные операторы в конечных линейных пространствах. Связь между матрицами. Обратимость операторов и обратный оператор. Ядро и образ оператора. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах.

7.Линейные операторы в Евклидовых пространствах. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные и нормальные линейные операторы.

8.Собственные значения и собственные векторы (элементы) линейных операторов. Характеристический многочлен. След оператора. Спектр (совокупность собственных значений) самосопряженных и унитарных операторов в конечномерных пространствах.

9.Перестановочные линейные операторы. Приведение матриц линейных операторов к диагональной форме. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженных операторов.

10.Канонический вид произвольных линейных операторов в конечномерном пространстве.

III.

1.Элементарные функции от комплексной. Дифференцируемость функций от комплексной переменной. Условия Коши-Римана.

2.Дробно-линейные функции. Конформные отображения и их свойства.
3.Понятие интеграла функции вдоль пути и его свойства (линейность, аддитивность от пути, инвариантность, ориентированность, оценки интеграла). Голоморфные функции. Теорема Коши для интегралов от голоморфных функций. Существование первообразных для голоморфных функций.
4.Интегральная формула Коши и её следствия.
5. Ряды Тейлора для голоморфных функций. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Область сходимости степенного ряда и формула Коши-Адамара. Эквивалентные определения (в терминах производных, интегралов и степенных рядов) голоморфных функций. Теорема единственности.
6.Теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах голоморфных функций.
7.Ряды Лорана и особые точки. Целые и мероморфные функции. Вычеты.
8. Понятие аналитического продолжения. Римановы поверхности.
9.Принцип аргумента и теорема Руше. Принцип максимума модуля.

IV.

1.Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциальных, уравнения с разделяющимся переменными, однородные уравнения, линейные уравнения .
2. Линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Случай простых или кратных корней характеристического многочлена.
3. Непрерывная зависимость решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных значений и параметров. Дифференцируемость решения по начальным значениям и параметрам.

4. Нормальная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений. Формула Лиувилля. Метод вариации постоянных. Линейное уравнение n-го порядка и его сведение к нормальной системе линейных уравнений.

5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение общей системы дифференциальных уравнений к нормальной.

6. Автономные системы. Фазовое пространство автономной системы. Структура решений в окрестности неособой точки. Фазовая плоскость автономной системы двух уравнений.

7. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия. Асимптотическая устойчивость. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости.

V.

1. Метрические пространства. Критерий полноты метрических пространств, теорема о вложенных в шарах. Пополнение метрических пространств. Принцип сжимающих отображений и его применения к дифференциальным и интегральным уравнениям.

2. Нормированные пространства. Пространства Банаха. Компакные множества в линейно нормированных пространствах. Теоремы Хаусдорфа, Рисса и Арцеля.

3.Гильбертово пространство. Полные системы, существование ортогональных базисов и процесс ортогонализации. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

4. Общее понятие меры. Измеримые множества.

5. Измеримые функции и действия над ними. Сходимость почти всюду и по мере. Теорема Егорова и Лузина.

6.Общее определение интеграла Лебега.Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

7. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (Теоремы Леви, Фату и Лебега).

8. Точки разрыва монотонных функций. Дифференцируемость почти всюду монотонной функций. Функции с ограниченной вариацией и их связь с монотонными функциями.

9. Восстановление функции по её производной. Абсолютно непрерывные функции.

10. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интегралы Лебега-Стильеса и Римана-Стильеса.

11. Общий вид линейных функционалов в пространстве непрерывных функций.

12. Пространства суммируемых функций. Пространства $L_p(a,b),\ p \geq 1$. Плотные подмножества в $L_p(a,b),\ p \geq 1$. Ортогональные системы функций в $L_p(a,b),\ p \geq 1$.

13. Ряд Фурье в $L_2(-\pi,\pi)$. Полнота тригонометрической системы.

14. Преобразование Фурье в L_1 и в L_2. Основные свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Преобразование Лапласа и операционное исчисление.

15. Обобщенные функции и их основные свойства. Классы основных функций. Преобразование Фурье обобщённых функций.

VI.

1.Привидение к каноническому виду линейного уравнения с частными производными второго порядка и классификация таких уравнений. Характеристические поверхности и задача Коши. Теорема Коши-Ковалевской (формулировка и обсуждение).

2.Фундаментальное решение для уравнений теплопроводности, для волнового уравнения и для уравнения Лапласа.

3.Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа. Распространение волн на прямой, на плоскости и в пространстве.

4.Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.

5.Гармонические функции. Формула Грина и теорема о среднем. Принцип максимума и его следствия.

6.Элементы теории потенциала (свойства объемного потенциала, потенциалов простого и двойного слоев).

7.Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве. Задачи Дирихле и Неймана (внешняя и внутренняя). Теорема единственности. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям.

8.Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости. Теорема единственности. Логарифмический потенциал и разрешимость краевых задач. Решение краевых задач для круга.

9.Метод Фурье (метод разделения переменных) для эллиптических операторов. Общая схема. Случай уравнений Лапласа с двумя независимыми переменными для прямоугольника и для круга.

10.Функция Грина задачи Дирихле и её общие свойства. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. Свойства собственных значений и собственных функций.

11.Смешанные задачи для уравнений гиперболического типа. Классическое решение (существование). Существование, единственность и непрерывная зависимость от входных данных обобщенного решения.

12.Метод Фурье для гиперболических уравнений. Колебание закрепленной струны и колебание прямоугольной закрепленной мембраны.

13.Смешанная задача для уравнений параболического типа. Принцип максимума. Теорема единственности и устойчивости классического решения. Существование классического решения в полуполосе. Обобщенное решение.

14.Функции Бесселя. Определение и простейшие свойства сферической функции.

15.Неравенства Фридрихса, Пуанкаре. Собственные значения оператора Лапласа при однородном краевом условии Дирихле.

16.Задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

Составитель:

Заведующий отдела Образования: д.н.м.,проф. Адалят Ахундов

Научный редактор: д.ф-м.н., проф. Гамидулла Асланов

Рецензенты: Чл.-корр. НАНА, проф. Билал Билалов

д.ф-м.н., проф. Акпер Алиев